Maths / janv 2023 / session 1

Questions de cours — Fct exponentielle

- $\exp(\ln x) = x$ fcts réciproques l'une de l'autre
- intervalle def $]-\infty ; +\infty[$, dérivable sur tout intervalle
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$ base ln !
- variation $\exp(x)$ tjs $> 0 \Rightarrow$ fct strictement croissante

$$\begin{cases} x \to -\infty & \exp(x) \to 0 \\ x \to +\infty & \exp(x) \to +\infty \end{cases}$$

- $\exp(ab) = (\exp a)^b$; $\exp\left(\frac{a}{b}\right) = \exp(ab^{-1}) = (\exp a)^{b^{-1}} = (\exp a)^{\frac{1}{b}}$

Nombres complexes

1) eq diff vérifiée par $v(t)$: $u_0 = v + Ri$ avec $i = C\dot{v}$

soit $u_0 = v + RC\dot{v} \Leftrightarrow \frac{u_0}{RC} = \frac{v}{RC} + \dot{v}$

ou $\dot{v} + \frac{v}{RC} = \frac{u_0}{RC}$; $\tau = RC$

$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{u_0}{\tau}$

2) $u_0 = U_0 \Rightarrow$ SPE telle que $\frac{v_{SPE}}{\tau} = \frac{U_0}{\tau} \Leftrightarrow v_{SPE} = U_0$

$\Rightarrow$ SGE $v(t) = \underbrace{Ke^{-t/\tau}}_{TSHE} + U_0 \Rightarrow$ pour déterminer K, il faudrait les CI

3) $\underline{u}_0(t) = Ae^{j\omega t} \to \underline{v}(t) = Be^{j(\omega t + \varphi)}$ passage aux complexes

$\underline{\dot{v}}(t) = Be^{j(\omega t+\varphi)} \times j\omega = j\omega \underline{v}(t)$ soit ds $\underline{\dot{v}} + \frac{\underline{v}}{RC} = \frac{\underline{u}_0}{RC}$

$j\omega Be^{j\varphi} + \frac{Be^{j\varphi}}{RC} = \frac{A}{RC}$

$\Leftrightarrow Be^{j\varphi}\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right) = A/RC$ soit $Be^{j\varphi} = \frac{A/RC}{1/RC + j\omega RC/RC} = \frac{A}{1 + j\omega RC}$

en multipliant par la qté conjugué au dénominateur $\Rightarrow Be^{j\varphi} = \frac{A(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$

4) $RC\omega = 3 \Rightarrow$ calcul de φ $\varphi = \arg(Be^{j\varphi}) = \arg(1 - j\omega RC) = \arg(1 - 3j)$

$1 - 3j = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3j}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

Dérivation $d(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x(x^2+1)^{-1/2} \Rightarrow d'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x \times -\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-3/2} \times \cancel{2}x$

$= (x^2+1)^{-3/2}\left((\cancel{x^2}+1) - \cancel{x^2}\right) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$

Intégration par partie $A = \int_1^X \ln x \, dx$ ici $v'(x) = 1 \to v(x) = x$

$u'(x) = 1/x \to u(x) = \ln x$

soit $A = X\ln X - X + 1$

Equations différentielles

- $y'' = \omega^2 y \iff y'' - \omega^2 y = 0$ $\quad y = e^{rx} \Rightarrow y' = ry$ et $y'' = r^2 y$

soit $r^2 y - \omega^2 y = 0 = y \underbrace{(r^2 - \omega^2)}_{\text{eq caract}} \Rightarrow r = \pm \omega$

$$y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$$
$$= a\,ch(\omega x) + b\,sh(\omega x)$$

forme équivalente

- $2y'' + 3y' - 2y = 0$ $\quad$ m^e type de solutions ....

soit $\underbrace{(2r^2 + 3r - 2)}_{\text{eq caract}} y = 0$ $\quad$ racines $\Delta = 9 + 4 \times 2 \times 2 = 5^2 \Rightarrow r = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$r_1 = 1/2 \, ; \, r_2 = -2$

soit finalement $y = a e^{x/2} + b e^{-2x}$

Circuit électrique LR série

$\Rightarrow$ calcul de $i(t)$

eq diff donnée : $L\dot{i} + Ri = U_0 \sin(\omega t)$

ou $\dot{i} + \frac{R}{L} i = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t)$

sol homogène $\Rightarrow$ $\dot{i} + \frac{R}{L} i = 0 = \dot{i} + \frac{i}{\tau}$ avec $\tau = L/R \Rightarrow i_{SHE} = K e^{-t/\tau}$

sol particulière $\Rightarrow$ $i_{SPE} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$\dot{i}_{SPE} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

réinjecté $\Rightarrow$ $\left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right) + \left(\frac{R}{L} A\cos(\omega t) + \frac{R}{L} B\sin(\omega t)\right) = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t)$

$\Rightarrow$ 2 eqs $\quad \sin(\omega t)\left(-A\omega + \frac{RB}{L}\right) = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t)$

$\cos(\omega t)\left(B\omega + \frac{RA}{L}\right) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -AL\omega + RB = U_0 \\ \text{et} \\ B\omega L + RA = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 2 eqs / 2 inconnues $\Rightarrow$ $A = -\frac{L\omega U_0}{R^2 + L^2\omega^2}$ et $B = \frac{RU_0}{R^2 + L^2\omega^2}$

$= U_0 \cos\varphi \qquad = U_0 \sin\varphi$

ici $\varphi = \arccos\left(\frac{-L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)$

$\Rightarrow$ on déduit $i_{SPE} = U_0 \cos(\omega t - \varphi)$

sol générale $\quad i(t) = Ke^{-t/\tau} + U_0\cos(\omega t - \varphi)$ or $i(t=0) = 0 \Rightarrow K + U_0\cos(-\varphi) = 0$

soit $K = -U_0\cos\varphi$

et finalement $\quad i(t) = U_0\left(\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi\, e^{-t/\tau}\right)$